المحاضرة الخامسة التكامل العددي

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة وقابلة للمكاملة على المجال $[a,b]$، لنقسم المجال $[a,b]$ إلى n من المجالات الجزئية المتساوية الطول والتي طول كل منها $h=\dfrac{b-a}{n}$ ولنفرض أنَّ أطراف هذه المجالات هي:

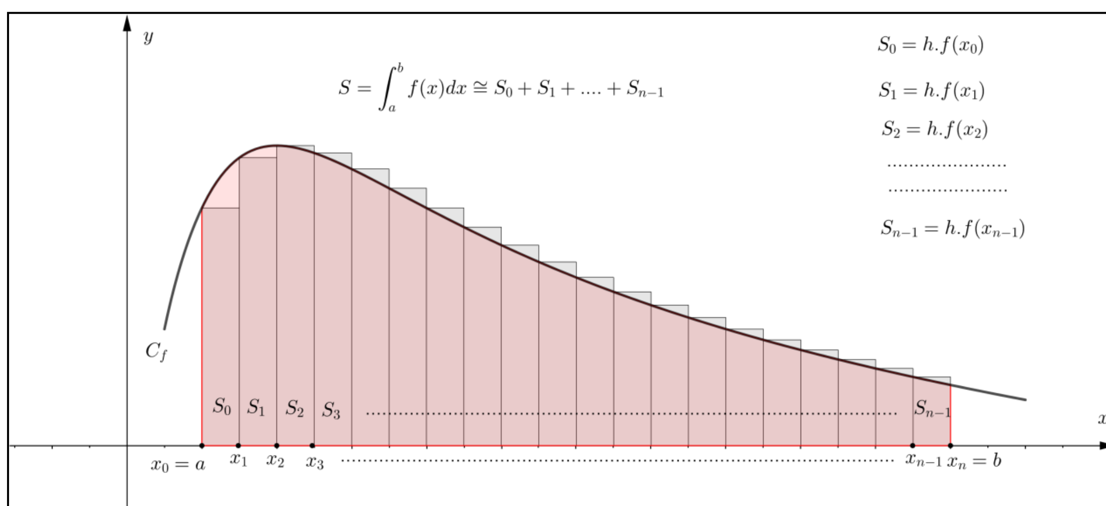
$$x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$$

$$|x_{i+1}-x_i|=h\ ;\quad \forall i=0,1,2,\ldots,n-1$$

من المعلوم أنَّ قيمة التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ تساوي إلى مساحة المنطقة المحصورة بين الخط البياني C_f والمحور ox والمستقيمين الشاقوليين $y=a, y=b$ ، ولإيجاد قيمة هذا التكامل سنتبع إحدى الطريقتين الآتيتين:

5.1. طريقة المستطيلات.

تعتمد هذه الطريق على رسم n من المستطيلات التي عرض كل منها h، كما هو موضح بالشكل:



وتكون قيمة التكامل في هذه الحالة تساوي تقريباً مجموع مساحات المستطيلات المرسومة وبالتالي:

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong h[f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})]$$

وكلما كانت قيمة n كبيرة بقدر كافي كانت القيمة التقريبية للتكامل أقرب من القيمة الحقيقية له.

مثال.1.

أوجد باستخدام طريقة المستطيلات القيمة التقريبية للتكامل:

$$I=\int_1^{11} e^{\frac{1}{x}}\,dx$$

وذلك بتقسيم المجال $[1,11]$ إلى خمسة أجزاء متساوية. (مكتفياً برقمين بعد الفاصلة).

الحل.

لدينا $h=\frac{11-1}{5}=2$. لنشكل جدول القيم للدالة $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

x_i	1	3	5	7	9	11
y_i	2.71	1.39	1.22	1.15	1.11	1.09

وبالتالي تكون القيمة التقريبية للتكامل:

$$I\cong h[f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)]=2\times 7.58=15.16$$

مثال.2.

أوجد باستخدام طريقة المستطيلات القيمة التقريبية للتكامل:

$$I=\int_1^{11}\sin(\frac{1}{x})\,dx$$

وذلك بتقسيم المجال $[1,11]$ إلى خمسة أجزاء متساوية. (مكتفياً برقمين فقط بعد الفاصلة).

الحل.

لدينا $h=\frac{11-1}{5}=2$. لنشكل جدول القيم للدالة $f(x)=\sin(\frac{1}{x})$ (نحسب قيمة الدالة بعد تحويل قياس الآلة الحاسبة للراديان $[SHIFT\to MODE\to 4]$).

x_i	1	3	5	7	9	11
y_i	0.84	0.32	0.19	0.14	0.11	0.09

وبالتالي تكون القيمة التقريبية للتكامل:

$$I\cong h[f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)]=2\times 1.6=3.2$$

مثال.3.

أوجد باستخدام طريقة المستطيلات القيمة التقريبية للتكامل:

$$I=\int_3^{18}\cos(\frac{1}{x})\,dx$$

وذلك باعتبار أنَّ $h=3$. (مكتفياً بثلاثة أرقام فقط بعد الفاصلة).

الحل.

لنشكل جدول القيم للدالة $f(x)=\cos(\frac{1}{x})$

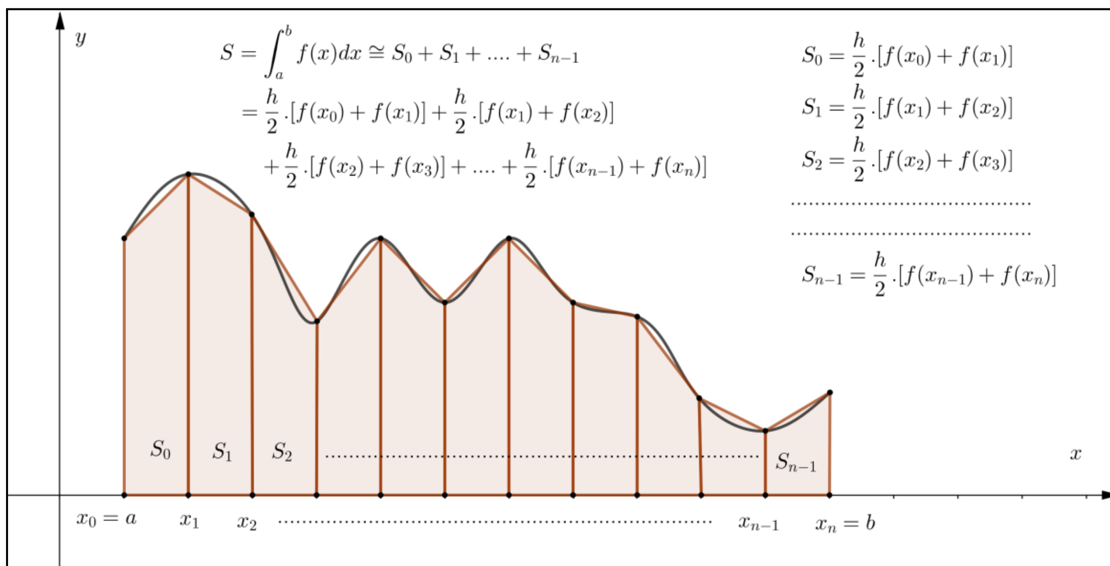
x_i	3	6	9	12	15	18
y_i	0.944	0.986	0.993	0.996	0.997	0.998

وبالتالي تكون القيمة التقريبية للتكامل:

$$I\cong h[f(3)+f(6)+f(9)+f(12)+f(15)]=3\times 4.916=14.748$$

5.2. طريقة أشباه المنحرفات.

تعتمد هذه الطريق على رسم n شبه منحرف التي ارتفاع كل منها h، كما هو موضح بالشكل:



وتكون قيمة التكامل في هذه الحالة تساوي تقريباً مجموع مساحات أشباه المنحرفات المرسومة وبالتالي:

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{2}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+...+2f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

وكلما كانت قيمة n كبيرة بقدر كافي كانت القيمة التقريبية للتكامل أقرب من القيمة الحقيقية له.

مثال.1.

أوجد باستخدام طريقة أشباه المنحرفات القيمة التقريبية للتكامل:

$$I = \int_1^{11} e^{\frac{1}{x}}\,dx$$

وذلك بتقسيم المجال $[1,11]$ إلى خمسة أجزاء متساوية. (مكتفياً برقمين بعد الفاصلة).

الحل.

لدينا $h = \frac{11-1}{5} = 2$. لنشكل جدول القيم للدالة $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

x_i	1	3	5	7	9	11
y_i	2.71	1.39	1.22	1.15	1.11	1.09

وبالتالي تكون القيمة التقريبية للتكامل:

$$I \cong \frac{h}{2}[f(1)+2f(3)+2f(5)+2f(7)+2f(9)+f(11)] = 13.54$$

مثال.2.

أوجد باستخدام طريقة أشباه المنحرفات القيمة التقريبية للتكامل:

$$I = \int_{1}^{11} \sin(\frac{1}{x})\,dx$$

وذلك بتقسيم المجال $[1,11]$ إلى خمسة أجزاء متساوية. (مكتفياً برقمين فقط بعد الفاصلة).

الحل.

لدينا $h = \frac{11-1}{5} = 2$. لنشكل جدول القيم للدالة $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$:

x_i	1	3	5	7	9	11
y_i	0.84	0.32	0.19	0.14	0.11	0.09

وبالتالي تكون القيمة التقريبية للتكامل:

$$I \cong \frac{h}{2}[f(1)+2f(3)+2f(5)+2f(7)+2f(9)+f(11)] = 2.45$$

مثال.3.

أوجد باستخدام طريقة أشباه المنحرفات القيمة التقريبية للتكامل:

$$I = \int_{3}^{18} \cos(\frac{1}{x})\,dx$$

وذلك باعتبار أنَّ $h = 3$. (مكتفياً بثلاثة أرقام فقط بعد الفاصلة).

الحل.

لنشكل جدول القيم للدالة $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$

x_i	3	6	9	12	15	18
y_i	0.944	0.986	0.993	0.996	0.997	0.998

وبالتالي تكون القيمة التقريبية للتكامل:

$$I \cong \frac{h}{2}[f(3)+2f(6)+2f(9)+2f(12)+2f(15)+f(18)] = \frac{3}{2}\times 9.886 = 14.829$$

مثال.4.

أوجد باستخدام طريقة المستطيلات ثم طريقة أشباه المنحرفات القيمة التقريبية للتكامل:

$$I = \int_{0}^{1} \frac{1}{x+1}\,dx$$

وذلك باعتبار أنَّ $h = 0.1$. (مكتفياً بثلاثة أرقام فقط بعد الفاصلة).

الحل.

لنشكل جدول القيم للدالة $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y_i	1	0.909	0.833	0.769	0.714	0.666	0.625	0.588	0.555	0.526	0.5

وبالتالي تكون القيمة التقريبية للتكامل حسب طريقة المستطيلات:

$$I \cong h[f(0)+f(0.1)+f(0.2)+f(0.3)+f(0.4)+f(0.5)+f(0.6)+f(0.7)+f(0.8)+f(0.9)]$$
$$=0.1\times 7.185=0.7185$$

وبالتالي تكون القيمة التقريبية للتكامل حسب طريقة أشباه المنحرفات:

$$I \cong \frac{h}{2}[f(0)+2f(0.1)+2f(0.2)+2f(0.3)+2f(0.4)+2f(0.5)+2f(0.6)+2f(0.7)+2f(0.8)+2f(0.9)+f(1)]$$
$$=\frac{0.1}{2}[14.068]=0.7034$$

تمرين.

أوجد باستخدام طريقة المستطيلات ثم طريقة أشباه المنحرفات القيمة التقريبية للتكامل:

$$I=\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$$

وذلك باعتبار أنَّ $h=0.2$. (مكتفياً بثلاثة أرقام فقط بعد الفاصلة).

الصفحة 2 من المحاضرة 4.

مبرهنة 1.

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق $n+1$ مرة متتالية في المجال $[x_m-h,x_m]$ وكانت $p_n(x)$ هي كثيرة حدود الاستيفاء من الدرجة n للدالة f حيث إنَّ نقاط الاستيفاء هي $x_0,x_1,x_2,....,x_m$ عندئذ فإنَّ الخطأ المرتكب في الاستيفاء عند النقطة x_l يعطى بالشكل:

$$R(x_l)=f(x_l)-p_n(x_l)=C_{n+1}^{n+s}\nabla^{n+1}y_m \quad ; \quad s=\frac{x_l-x_n}{h}$$

في حل المثال الأول. $p_3(x)=y_5+s\nabla y_5+\dfrac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 y_5+\dfrac{s(s+1)(s+2)}{3!}\nabla^3 y_5$

الصفحة 3.

$$R(2.5)=C_4^{3+s}\nabla^4 y_5=\frac{s(s+1)(s+2)(s+3)}{4!}\nabla^4 y_5=0 \quad ; \quad s=\frac{2.5-12}{2}$$